



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN,
RISET DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MANADO

Alamat: Kampus Unima di Tondano 95618
Telepon (0431) 321945, 321846, 321847, Fax. (0431) 321866
Laman: www.unima.ac.id

Nomor : 1959 /UN41/KP/2023
Lampiran : 1 (satu) berkas
Hal : Perbaikan Usul Penilaian Angka Kredit untuk Kenaikan Pangkat dan Jabatan Dosen
a.n. Dr. Nicky Kurnia Tumulun, S.Pd, M.Sc.

Yth. Menteri Pendidikan, Kebudayaan, Riset dan Teknologi
u.p. Kepala Biro Sumber Daya Manusia
Jakarta.

Bersama ini kami sampaikan perbaikan usul penilaian angka kredit untuk kenaikan pangkat dan jabatan,
atas nama:

Nama : Dr. Nicky Kurnia Tumulun, S.Pd, M.Sc.
NIP : 198509032014041001
NIDN : 0003098501
Pangkat, golongan ruang, TMT : Penata/III/c, 1 Oktober 2021
Jabatan, TMT : Lektor, 1 Juli 2021. (303,5 Kum)
Jurusan : Matematika
Unit Kerja : Fakultas Matematika, IPA dan Kebumihan Unima

Menjadi

Pangkat/Gol/Ruang : Penata Tkt. I / III / d
Jabatan : Lektor Kepala
Dalam Bidang Ilmu : Analisis Matematika

Sebagai informasi, berdasarkan hasil penilaian bulan Juni 2023, maka pengusul telah melakukan perbaikan sebagai berikut:

1. Mengajukan tambahan beberapa artikel untuk menambah angka kredit bidang penelitian
2. Mengunggah Dokumen Bukti Korespondensi pada artikel Jurnal Ilmiah Internasional Bereputasi
3. Memperbaiki Kebutuhan dan Formasi Jabatan, dan
4. Memberikan Klarifikasi Karya Ilmiah

Klarifikasi yang dimaksud adalah sebagai berikut :

No.	Komentar Reviewer	Klarifikasi Pengusul
1	<p>Jurnal ilmiah internasional bereputasi Judul Artikel: Inclusion between generalized stummel classes and other function spaces, Penulis: Tumulun N.K., Nama Jurnal: Mathematical Inequalities and Applications, Volume Jurnal: 23, Tahun Terbit Jurnal: 2020, Halaman: 547-562, ISSN: 13314343, Penerbit: PUBLISHER Element d.o.o., DOI: https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-45 Keterangan Tambahan: INDEKS SCOPUS Q2 [Lihat URL] [Lihat DOI] [Lihat URL Dokumen] [Lihat URL Dokumen Cek Similarity atau Originality] [Lihat URL index jurnal] [Lihat URL Dokumen Bukti Korespondensi]</p> <p>Komentar dari Reviewer :</p>	<ol style="list-style-type: none">1. Karya ilmiah ini tidak akan dijadikan syarat khusus kenaikan JF, karena sudah 3 (tiga) artikel yang diterima sebagai syarat khusus.2. Karya ilmiah ini di-submit di jurnal saat pengusul sedang tugas belajar di ITB. Tetapi, status pengusul adalah dosen tetap (PNS) di Unima, sebelum, saat, dan sesudah tugas belajar.3. Dalam PO PAK Dikti 2019 (beserta suplemen-suplemennya), tidak ada persyaratan afiliasi harus sesuai dengan PT (dalam hal ini Unima) tempat pengusul bekerja sebagai dosen yang diusulkan dalam JF. Pengusul merupakan kontributor terbesar dalam penulisan karya ilmiah ini. Hal ini dapat terlihat dalam artikel karena pengusul merupakan penulis pertama. Pengusul bukan

	<p>Karil terbit pada jurnal international terindeks Scopus, dengan SJR.0.696. Pengusul penulis ke 1 dari 3, PK=penulis ke 1. Bukti korespondensi tidak dilampirkan. Bidang karil analisis matematika, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada kesesuaian antara bidang S3, bidang penugasan LK, dan bidang karil. Karena AFILIASI pengusul berbeda dengan yang seharusnya, maka karil tidak dinilai. Ditolak</p>	<p>corresponding author (penulis kedua yang merupakan corresponding author), sehingga pengusul tidak mempunyai bukti korespondensi yang dapat dilampirkan.</p> <p>4. Mohon kebijaksanaan reviewer untuk mempertimbangkan karya ilmiah agar KUM/angka kredit karya ilmiah ini dapat dihitung</p>
2	<p>Jurnal ilmiah internasional bereputasi Judul Artikel: SOME NOTES ON THE INCLUSION BETWEEN MORREY SPACES, Penulis: Tuerah P.E.A., Nama Jurnal: Journal of Mathematical Inequalities, Volume Jurnal: 16, Tahun Terbit Jurnal: 2022, Halaman: 355-362, ISSN: 1846579X, Penerbit: PUBLISHER Element d.o.o, DOI: https://doi.org/10.7153/jmi-2022-16-26</p> <p>Keterangan Tambahan: INDEKS SCOPUS Q2 [Lihat URL] [Lihat DOI] [Lihat URL Dokumen] [Lihat URL Dokumen Cek Similarity atau Originality] [Lihat URL index jurnal] [Lihat URL Dokumen Bukti Korespondensi]</p> <p>Komentar dari Reviewer : Karil terbit pada jurnal international terindeks Scopus, dengan SJR.0.472. Pengusul penulis ke 2 dari 2, PK=penulis ke 2. Bidang karil analisis matematika, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada kesesuaian antara bidang S3, bidang penugasan LK, dan bidang karil. Karil belum dapat dinilai, karena (1) Cek similarity salah, (2) bukti korespondensi belum disertakan. Pengusul agar memperbaiki usulan, dengan (1) dilakukan ulang cek similarity dan mengunggah hasilnya ke sistem PAK Dikti. (2) mengunggah bukti korespondensi</p>	<p>1. Karya ilmiah pengusul ini tidak akan dijadikan syarat khusus kenaikan JF, karena sudah 3 (tiga) artikel pengusul yang diterima sebagai syarat khusus.</p> <p>2. Bukti korespondensi dan uji/cek similarity sudah diperbaiki.</p> <p>3. Mohon kebijaksanaan reviewer untuk mempertimbangkan karya ilmiah pengusul ini agar KUM/angka kreditnya dapat dihitung</p>
3	<p>Jurnal ilmiah internasional bereputasi Judul Artikel: Some function spaces and their applications to elliptic partial differential equations, Penulis: NK Tumalun, DI Hakim, H Gunawan, Nama Jurnal: Math. Vesnik (in press), 2022, Volume Jurnal: 1, Tahun Terbit Jurnal: 2022, Halaman: 1, ISSN: ISSN 2406-0682 (Online), ISSN 0025-5165 (Print), Penerbit: PUBLISHER Drustvo Matematicara Srbije, SJR: 0,24 Keterangan Tambahan: INDEKS SCOPUS Q3 [Lihat URL] [Lihat URL Dokumen] [Lihat URL Dokumen Cek Similarity atau Originality] [Lihat URL index jurnal] [Lihat URL Dokumen Bukti Korepondensi]</p>	<p>1. Karya ilmiah pengusul ini tidak akan dijadikan syarat khusus kenaikan JF, karena sudah 3 (tiga) artikel pengusul yang diterima sebagai syarat khusus.</p> <p>2. Artikel pengusul ini dapat diunduh melalui tautan http://www.vesnik.math.rs/landing.php?p=mv232.cap&name=mv23201. Dalam artikel pengusul ini, tercatat artikel ini di-submit pada bulan Oktober 2020, 4 bulan setelah pengusul selesai studi S3. 3)</p> <p>3. Metode pembuktian teorema utama (main theorem) dalam artikel pengusul ini, berbeda dengan yang pengusul lakukan dalam disertasi pengusul. Dalam artikel ini pengusul</p>

	<p>Komentar dari Reviewer : Karil merupakan bagian disertasi pengusul, diterbitkan setelah ybs lulus studi S3, tidak ada pengembangan. Sesuai ketentuan yang ada pada PO PAK 2019, karil tidak dinilai (ditolak)</p>	<p>menggunakan teknik aproksimasi terhadap solusi lemah persamaan untuk mengatasi fungsi komposisi turunan lemah (yang sepengetahuan pengusul tidak ada alat matematis untuk mengkalkulasi fungsi komposisi tersebut).</p> <p>4. Mohon kebijaksanaan reviewer untuk mempertimbangkan karya ilmiah agar KUM/angka kredit karya ilmiah ini dapat dihitung</p>
4	<p>Jurnal nasional DOAJ/CABI/Copernicus/Peringkat 3 dan 4 Judul Artikel: PEMBELAJARAN DARING PADA PELAJARAN MATEMATIKA SISWA KELAS XI IPA SMA NEGERI 1 TOMOHON, Penulis: Krista Monika Ransun; Anetha L.F. Tilaar; Nicky Kurnia Tumulun, Nama Jurnal: Jurnal Lebesgue : Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika dan Statistika, Volume Jurnal: Vol. 4 No. 1 (2023): Jurnal Lebesgue, Tahun Terbit Jurnal: 2023, Halaman: 236-245, ISSN: 27218929, Penerbit: LPPM Bina Bangsa , DOI: https://doi.org/10.46306/lb.v4i1.240</p> <p>Keterangan Tambahan: INDEKS SINTA 4 [Lihat URL] [Lihat DOI] [Lihat URL Dokumen] [Lihat URL index jurnal]</p> <p>Komentar dari Reviewer : Isi artikel tidak memenuhi kaidah penelitian. Artikel tidak dinilai</p>	<p>1. Karya ilmiah ini dipublikasikan dalam jurnal nasional Sinta 4.</p> <p>2. Artikel ini merupakan hasil penelitian dalam Skripsi mahasiswa bimbingan pengusul. Oleh karena itu kualitas penelitian ini sesuai dengan kemampuan mahasiswa pada program sarjana.</p> <p>3. Mohon kebijaksanaan reviewer untuk mempertimbangkan karya ilmiah ini agar KUM/angka kreditnya dapat dihitung</p>
5	<p>Jurnal nasional DOAJ/CABI/Copernicus/Peringkat 3 dan 4 Judul Artikel: PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN PROBLEM BASED LEARNING PENDEKATAN OPEN ENDED MATERI SEGIEMPAT DAN SEGITIGA, Penulis: Hanietje Detly Timbuleng; Santje Salajang; Nicky Tumulun, Nama Jurnal: Jurnal Pendidikan Matematika Unpatti, Volume Jurnal: Vol 2 No 3 (2021): Jurnal Pendidikan Matematika Unpatti, Tahun Terbit Jurnal: 2021, Halaman: 81-88, ISSN: 27236870, Penerbit: JPM Unpatti , DOI: https://doi.org/10.30598/jpmunpatti.v2.i3.p81-88</p> <p>Keterangan Tambahan: INDEKS SINTA 4 [Lihat URL] [Lihat DOI] [Lihat URL Dokumen] [Lihat URL index jurnal]</p> <p>Komentar dari Reviewer : Artikel/paper membahas tentang langkah-langkah</p>	<p>1. Karya ilmiah pengusul ini dipublikasikan dalam jurnal nasional Sinta 4.</p> <p>2. Artikel ini merupakan hasil penelitian dalam Skripsi mahasiswa, yang merupakan mahasiswa bimbingan pengusul. Oleh karena itu kualitas penelitian ini sesuai dengan kemampuan mahasiswa pada program sarjana.</p> <p>3. Mohon kebijaksanaan reviewer untuk mempertimbangkan karya ilmiah ini agar KUM/angka kreditnya dapat dihitung</p>

	pembuatan/pengembangan perangkat pembelajaran. Isi paper bukan termasuk hasil kegiatan penelitian. Paper tidak dinilai	
6	<p>Jurnal nasional DOAJ/CABI/Copernicus/Peringkat 3 dan 4</p> <p>Judul Artikel: DESKRIPSI PEMBELAJARAN DARING MATA PELAJARAN MATEMATIKA PADA MASA PANDEMI COVID-19, Penulis: KK Malonda, I Domu, NK Tumulun, Nama Jurnal: Jurnal Lebesgue: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika, Matematika dan ... , 2023, Volume Jurnal: 4, Nomor Jurnal: 1, Tahun Terbit Jurnal: 2023, Halaman: 316, ISSN: p-ISSN 2721-8929, e-ISSN 2721-8937, Penerbit: Univ. Bina Bangsa</p> <p>Keterangan Tambahan: INDEKS SINTA 4 [Lihat URL] [Lihat URL Dokumen] [Lihat URL index jurnal]</p> <p>Komentar dari Reviewer : Isi artikel tidak memenuhi kaidah penelitian. Artikel tidak dinilai</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Karya ilmiah ini dipublikasikan dalam jurnal nasional Sinta 4. 2. Artikel ini merupakan hasil penelitian dalam Skripsi mahasiswa, yang merupakan mahasiswa bimbingan pengusul. Oleh karena itu kualitas penelitian ini sesuai dengan kemampuan mahasiswa pada program sarjana. 3. Mohon kebijaksanaan reviewer untuk mempertimbangkan karya ilmiah ini agar KUM/angka kreditnya dapat dihitung
7	<p>Jurnal nasional terakreditasi (Sinta 1 dan 2)</p> <p>Judul Artikel: AN EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE WEAK SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM WITH THE DATA IN MORREY SPACES, Penulis: Nicky Kurnia Tumulun, Nama Jurnal: BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, Volume Jurnal: Vol 16 No 3 (2022): BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, Tahun Terbit Jurnal: 2022, Halaman: 829-834, ISSN: 19787227, Penerbit: FMIPA PATTIMURA , DOI: https://doi.org/10.30598/barekengvol16is3pp829-834</p> <p>Komentar dari Reviewer : <i>Karil terbit pada jurnal nasional peringkat 2. Pengusul penulis ke 1 dari 1. Bukti korespondensi tidak dilampirkan. Bidang karil analisis matematika, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada kesesuaian antara bidang S3, bidang penugasan LK, dan bidang karil. Ada beberapa kesalahan terkait bahasa. Tidak ditemukan adanya indikasi plagiasi. Kualitas jurnal cukup.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Bukti Korespondensi Untuk Jurnal Nasional dan Jurnal Nasional Terakreditasi (1 sd 6) tidak diperlukan karena TIDAK DIMINTA pada aplikasi, URL Dokumen Bukti Korespondensi (Wajib) TIDAK ADA / TIDAK DISIAPKAN. • Pada Aplikasi, URL Dokumen Bukti Korespondensi (Wajib) hanya diberlakukan/diminta pada JURNAL/PROSIDING INTERNASIONAL, JURNAL INTERNASIONAL BEREPUTASI.
8	<p>Jurnal nasional terakreditasi (Sinta 1 dan 2)</p> <p>Judul Artikel: FUNGSI ELEMEN KELAS STUMMEL MODULUS TERBATAS TETAPI BUKAN</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Klarifikasi pengusul sama dengan penjelasan pada angka / nomor 7 (tujuh)

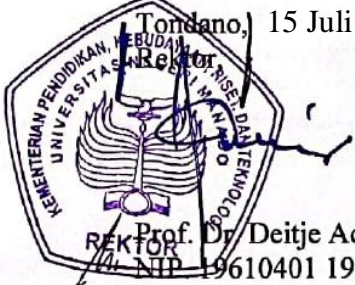
	<p>ELEMEN DARI KELAS STUMMEL, Penulis: Nicky Kurnia Tumulun, Nama Jurnal: BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, Volume Jurnal: Vol 15 No 1 (2021): BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan, Tahun Terbit Jurnal: 2021, Halaman: 077-084, ISSN: 19787227, Penerbit: FMIPA PATTIMURA , DOI: https://doi.org/10.30598/barekengvol15iss1pp077-084</p> <p>Komentar dari Reviewer : <i>Karil terbit pada jurnal nasional peringkat 2. Pengusul penulis ke 1 dari 1. Bukti korespondensi tidak dilampirkan. Bidang karil analisis matematika, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada kesesuaian antara bidang S3, bidang penugasan LK, dan bidang karil. Tidak ditemukan adanya indikasi plagiasi. Tata tulis kurang bagus, ada beberapa kalimat yang diawali dengan simbol. Kualitas jurnal cukup.</i></p>	
9	<p>Jurnal nasional biasa Judul Artikel: ANALISIS KESALAHAN PESERTA DIDIK DALAM MENYELESAIKAN SOAL MATEMATIKA MATERI OPERASI MARIKS, Penulis: V Oroh, O Manurung, NK Tumulun, Nama Jurnal: ADIBA: JOURNAL OF EDUCATION 2 (2), 282-291, 2022, Volume Jurnal: 2, Nomor Jurnal: 2, Tahun Terbit Jurnal: 2022, Halaman: 282, ISSN: e-ISSN: 2808-4721, Penerbit: ADIBA: JOURNAL OF EDUCATION</p> <p>Komentar dari Reviewer : <i>Karil terbit pada jurnal nasional. Pengusul penulis ke 3 dari 3. PK=penulis ke 1. Bukti korespondensi tidak dilampirkan. Bidang karil pendidikan, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada ketidaksesuaian antara bidang karil dengan bidang S3 dan bidang penugasan LK. Tidak ditemukan adanya indikasi plagiasi. Pengambilan kesimpulan masih terlalu dini, hanya didasarkan pada satu kali pengamatan. Kualitas jurnal kurang.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Klarifikasi pengusul sama dengan penjelasan pada angka / nomor 7 (tujuh)
10	<p>Jurnal nasional peringkat 5 dan 6 Judul Artikel: ANALISIS KESALAHAN SISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL CERITA BENTUK ALJABAR MENGUNAKAN PROSEDUR NEWMAN, Penulis: Angelia Augifty Evan Karouw; Nicky K. Tumulun; Jorry F. Monoarfa, Nama Jurnal: Jurnal Sains Riset, Volume Jurnal: Vol 13, No 1 (2023): April 2023, Tahun Terbit Jurnal: 2023, Halaman: 41-46, ISSN: 20880952,</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Klarifikasi pengusul sama dengan penjelasan pada angka / nomor 7 (tujuh)

	<p>Penerbit: Institut Pendidikan Tapanuli Selatan, DOI: https://doi.org/10.47647/jsr.v13i1.874</p> <p>Komentar dari Reviewer : <i>Karil terbit pada jurnal nasional peringkat 5. Pengusul penulis ke 2 dari 3. PK=penulis ke 1. Bukti korespondensi tidak dilampirkan. Bidang karil pendidikan, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada ketidaksesuaian antara bidang karil dengan bidang S3 dan bidang penugasan LK. Tidak ditemukan adanya indikasi plagiasi. Pengambilan kesimpulan masih terlalu dini, hanya didasarkan pada satu kali pengamatan. Referensi sangat sedikit jumlahnya. Kualitas jurnal kurang</i></p>	
11	<p>Jurnal nasional peringkat 5 dan 6 Judul Artikel: PENERAPAN MODEL PEMBELAJARAN KOOPERATIF TIPE PAIR CHECK PADA POKOK PEMBAHASAN SEGITIGA DI KELAS VII SMP NEGERI 1 TOMBATU, Penulis: Therezia Imelda Oroh; Anekke Pesik; Nicky K. Tumulun, Nama Jurnal: Jurnal Sains Riset, Volume Jurnal: Vol 12, No 3 (2022): November 2022, Tahun Terbit Jurnal: 2022, Halaman: 594-598, ISSN: 20880952, Penerbit: Univ. Jabal Ghafur , DOI: https://doi.org/10.47647/jsr.v12i3.826</p> <p>Komentar dari Reviewer : <i>Karil terbit pada jurnal nasional peringkat 5. Pengusul penulis ke 3 dari 3. PK=penulis ke 1. Bukti korespondensi tidak dilampirkan. Bidang karil pendidikan, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada ketidaksesuaian antara bidang karil dengan bidang S3 dan bidang penugasan LK. Tidak ditemukan adanya indikasi plagiasi. Pengambilan kesimpulan masih terlalu dini, hanya didasarkan pada satu kali pengamatan. Referensi sangat sedikit jumlahnya. Kualitas jurnal kurang</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Klarifikasi pengusul sama dengan penjelasan pada angka / nomor 7 (tujuh)
12	<p>Jurnal nasional peringkat 5 dan 6 Judul Artikel: PENGARUH MODEL PEMBELAJARAN PROBLEM BASED LEARNING BERBANTUAN SOFTWARE GEOGEBRA PADA MATERI BANGUNRUANG SISI DATAR DI KELAS VIII SMP NEGERI 6 TONDANO, Penulis: Nirma Potabuga; Nicky K. Tumulun; Jorry F. Monoarfa, Nama Jurnal: Jurnal Sains Riset, Volume Jurnal: Vol 12, No 3 (2022): November 2022, Tahun Terbit Jurnal: 2022, Halaman: 587-593, ISSN: 20880952, Penerbit: Univ. Jabal Ghafur , DOI: https://doi.org/10.47647/jsr.v12i3.827</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Klarifikasi pengusul sama dengan penjelasan pada angka / nomor 7 (tujuh)

<p>Komentar dari Reviewer : <i>Karil terbit pada jurnal nasional peringkat 5. Pengusul penulis ke 2 dari 3. PK=penulis ke 1. Bukti korespondensi tidak dilampirkan. Bidang karil pendidikan, sesuai dengan scope jurnal. Bidang S3 analisis matematika, bidang penugasan LK analisis matematika. Ada ketidaksesuaian antara bidang karil dengan bidang S3 dan bidang penugasan LK. Tidak ditemukan adanya indikasi plagiasi. Pengambilan kesimpulan masih terlalu dini, hanya didasarkan pada satu kali pengamatan. Kualitas jurnal kurang.</i></p>	
---	--

Demikian Perbaikan Usul Penilaian Angka Kredit kami sampaikan, semoga dapat diterima dengan baik untuk proses selanjutnya.

Atas perhatian Saudara, kami mengucapkan terima kasih.

Tondano, 15 Juli 2023

 REKTOR Prof. Dr/Deitje Adolfien Katuuk, M.Pd.
 NIP. 19610401 198503 2 004

Tembusan :

1. Irjen Kemendikbudristek di Jakarta
2. Dirjen Kemendikbudristek di Jakarta
3. Dekan FMIPAK Unima.



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN,
RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI MANADO
FAKULTAS MATEMATIKA, ILMU PENGETAHUAN ALAM
DAN KEBUMIHAN

Alamat: Kampus Unima di Tondano, Kab. Minahasa, Sulawesi Utara, 95618
Laman: <https://fmipa.unima.ac.id/> Email: fmipak@unima.ac.id

KEBUTUHAN DAN FORMASI JABATAN FUNGSIONAL DOSEN
FAKULTAS MATEMATIKA, ILMU PENGETAHUAN ALAM DAN KEBUMIHAN
UNIVERSITAS NEGERI MANADO

Dekan Fakultas Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam dan Kebumihan Universitas Negeri Manado menerangkan bahwa kebutuhan dan formasi dosen Jurusan Matematika Tahun 2022-2027 adalah sebagai berikut:

Jumlah dosen saat ini	Kelompok keilmuan Bidang Ilmu Matematika		Kebutuhan Pengembangan Keilmuan Matematika	Jumlah Kebutuhan Formasi yang Tersedia
	Lektor Kepala	Guru Besar		
2	0	0	Analisis Matematika	Profesor : 1 Lektor Kepala : 1
6	0	1	Matematika Terapan	Profesor : 1 Lektor Kepala : 1
2	2	0	Statistika Matematika	Profesor : 1 Lektor Kepala : 1
1	1	0	Data Sains Matematika	Profesor : 1 Lektor Kepala : 1
1	0	0	Graf dan Kombinatorika	Profesor : 1 Lektor Kepala : 1
9	4	0	Pendidikan Matematika	Profesor : 2 Lektor Kepala : 4
8	5	0	Penelitian dan Evaluasi Pendidikan Matematika	Profesor : 1 Lektor Kepala : 3
29	Jumlah Dosen			

Demikian surat keterangan ini, untuk dapat digunakan sebagaimana mestinya.

Tondano, 13 JUL 2023
Dekan,

Prof. Dr. Rolles Nixon Palilingan, MS.
NIP. 19640511 198803 1 001

Tembusan Yth:
Rektor Unima (sebagai laporan)

SOME NOTES ON THE INCLUSION BETWEEN MORREY SPACES

by Nicky Tumulun

Submission date: 29-Aug-2023 11:14AM (UTC+0700)

Submission ID: 2153243191

File name: n_KI_SOME_NOTES_ON_THE_INCLUSION_BETWEEN_MORREY_SPACES..._OK.pdf (141.47K)

Word count: 2876

Character count: 11202

¹ See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/359481329>

Some notes on the inclusion between Morrey spaces

Article in *Journal of Mathematical Inequalities* · March 2022

DOI:10.7153/jmi-2022-16-26

CITATIONS

2

READS

80

2 authors, including:



Nicky Kurnia Tumulun

Universitas Negeri Manado

¹ 10 PUBLICATIONS 23 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Konsep Sudut pada Ruang Bernorma-n dan Aplikasi Kelas Stummel dalam Teori Regularitas ⁸ [View project](#)

All content following this page was uploaded by Nicky Kurnia Tumulun on 26 March 2022.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

SOME NOTES ON THE INCLUSION BETWEEN MORREY SPACES

PHILOTHEUS E. A. TUERAH AND NICKY K. TUMALUN*

(Communicated by L. Liu)

2 *Abstract.* In this paper, we show that the Morrey spaces $\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$ cannot be contained in the weak Morrey spaces $w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ for $q_1 \neq q_2$. We also show that the vanishing Morrey spaces $\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ are not empty and properly contained in the Morrey spaces $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

1. Introduction

Let $1 \leq p \leq q < \infty$ and $n \geq 2$. The Morrey space $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ is the set of all functions $f \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ for which

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(B(x, r))} < \infty,$$

where

$$\|f\|_{L^p(B(x, r))} = \left(\int_{B(x, r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Here $B(x, r)$ is the open ball in Euclidean space \mathbb{R}^n with center x and radius r , and $|B(x, r)|$ denotes its Lebesgue measure. Meanwhile, the weak Morrey space $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ is defined to be the set of all functions $f \in wL_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n)$ for which

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_{wL^p(B(x, r))} < \infty,$$

where

$$\|f\|_{wL^p(B(x, r))} = \sup_{t > 0} t |\{y \in B(x, r) : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}},$$

and $|\{y \in B(x, r) : |f(y)| > t\}|$ also denotes the Lebesgue measure of the set $\{y \in B(x, r) : |f(y)| > t\}$. Now, we define

$$\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) : \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{M}_f(r) = 0 \right\},$$

Mathematics subject classification (2020): 46E30, 42B35.

Keywords and phrases: Morrey spaces, vanishing Morrey spaces.

* Corresponding author.

where

$$\mathcal{M}_f(r) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |B(x, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(B(x, r))}.$$

The set $\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ is called the *vanishing Morrey space*. It is clear that $\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ is a subset of $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

The Morrey spaces were introduced by C. B. Morrey [1] and the vanishing Morrey spaces were introduced in [2]. Recently, many authors are attracted in studying the inclusion properties between Morrey spaces [3, 4, 5, 6, 7, 8]. One interesting result stated in [5, Remark 4.5], that is, the weak Morrey spaces $w\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$ cannot be contained in the weak Morrey spaces $w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ and vice versa, for distinct values q_1 and q_2 . This statement was deduced by a characterization of inclusion between weak Morrey spaces and its parameters, which is proved by using Closed Graph Theorem and Morrey norm estimate for the characteristic functions of balls [5, Theorem 4.4]. Regarding to the inclusion between vanishing Morrey spaces and Morrey spaces over a bounded domain, it was stated in [9] that the vanishing Morrey spaces are properly contained in the Morrey spaces without giving an explicit counter example.

In this paper, we will prove that the Morrey spaces $\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$ cannot be contained in the weak Morrey spaces $w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ and the Morrey spaces $\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ cannot be contained in the weak Morrey spaces $w\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$, for different values q_1 and q_2 . This result is more general and sharp than the previous result in [5] since we can recover that previous result and the fact that $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ is a proper subset of $w\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ [6, Theorem 1.2]. We also note that our method here is different than in [5] because we give a function which belongs to $\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n) \setminus w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ and a function which belongs to $\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n) \setminus w\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$. Furthermore, by using the idea in [8], we also show that the vanishing Morrey spaces $\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ are non empty and properly contained in $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ by providing some examples.

The positive constant C that appears in the proofs of all theorems may vary from line to line and the notation $C = C(n, p, q)$ indicates that C depends only on n, p and q .

2. A note on the inclusion between weak Morrey spaces

Let $1 \leq p < q < \infty$ and $\gamma = \frac{n}{q} < n$. Define a function $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ by the formula

$$f(y) = \begin{cases} |y|^{-\gamma}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

It is clear that $1 - \frac{n}{p\gamma} < 0$ and $n - p\gamma > 0$ by observing to the given assumptions.

The function f , that appears in Lemma 1 and 3, is defined by (1).

LEMMA 1. If $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$, then $\|f\|_{L^p(B(x, r))} \leq Cr^{\frac{n}{p} - \gamma} = Cr^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}}$, where $C = C(n, p, q)$.

Proof. Note that

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy &= \int_{\{|y| \leq |x-y| < r\}} |y|^{-p\gamma} dy + \int_{\{|x-y| < |y|\} \cap \{|x-y| < r\}} |y|^{-p\gamma} dy \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Since $n - p\gamma > 0$, we have

$$I \leq \int_{\{|y| < r\}} |y|^{-p\gamma} dy = C \int_0^r t^{n-p\gamma-1} dt = Cr^{n-p\gamma}$$

and

$$II \leq \int_{\{|x-y| < r\}} |x-y|^{-p\gamma} dy = C \int_0^r t^{n-p\gamma-1} dt = Cr^{n-p\gamma},$$

by using polar coordinate for radial function. Therefore

$$\|f\|_{L^p(B(x,r))} = \left(\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(Cr^{\frac{n}{p}-\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} = Cr^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}},$$

which proves the lemma. \square

The following lemma is not hard to prove. We leave its proof to the reader.

LEMMA 2. Let $s > 0$, $M \geq 0$, and $\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. If

$$\sup_{0 < t \leq s} \varphi(t) = M = \sup_{s < t < \infty} \varphi(t),$$

then

$$\sup_{t > 0} \varphi(t) = M.$$

Using the above lemma, we can compute the weak Lebesgue norm of f on the ball $B(0, r)$ with arbitrary radius r .

LEMMA 3. If $r > 0$, then $\|f\|_{wL^p(B(0,r))} = Cr^{-\gamma+\frac{n}{p}} = Cr^{-\frac{n}{q}+\frac{n}{p}}$, where $C = C(n, p, q)$.

Proof. Let r be an arbitrary positive real number. Note that, for every $t > 0$, we have

$$\begin{aligned} |\{y \in B(0, r) : |f(y)| > t\}| &= \left| \left\{ y \in B(0, r) : |y| < t^{-\frac{1}{\gamma}} \right\} \right| \\ &= \left| B(0, r) \cap B(0, t^{-\frac{1}{\gamma}}) \right|. \end{aligned} \quad (2)$$

We now define $\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ by the formula

$$\varphi(t) = t |\{y \in B(0, r) : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}}. \quad (3)$$

For every $t > r^{-\gamma}$, we obtain $t^{-\frac{1}{\gamma}} < r$. Then

$$|\{y \in B(0, r) : |f(y)| > t\}| = |B(0, t^{-\frac{1}{\gamma}})| = Ct^{-\frac{n}{\gamma}},$$

by using (2). This gives us

$$t|\{y \in B(0, r) : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}} = Ct \left(t^{-\frac{n}{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p}} = Ct^{1-\frac{n}{p\gamma}}, \quad \forall t \in (r^{-\gamma}, \infty). \quad (4)$$

27

On the other hand, for every $t \leq r^{-\gamma}$, we have $t^{-\frac{1}{\gamma}} \geq r$. Hence

$$|\{y \in B(0, r) : |f(y)| > t\}| = |B(0, r)| = Cr^n,$$

which comes from (2). Therefore,

$$t|\{y \in B(0, r) : |f(y)| > t\}|^{\frac{1}{p}} = Ct(r^n)^{\frac{1}{p}} = Ctr^{\frac{n}{p}}, \quad \forall t \in (0, r^{-\gamma}]. \quad (5)$$

We obtain

$$\varphi(t) = \begin{cases} Ct^{1-\frac{n}{p\gamma}}, & \forall t \in (r^{-\gamma}, \infty) \\ Ctr^{\frac{n}{p}}, & \forall t \in (0, r^{-\gamma}]. \end{cases}$$

by virtue of (4) and (5). Observing φ non increasing on $(r^{-\gamma}, \infty)$ and non decreasing on $(0, r^{-\gamma}]$, since $1 - \frac{n}{p\gamma} < 0$ and $\frac{n}{p} > 0$ respectively, then

$$\sup_{r^{-\gamma} < t < \infty} \varphi(t) = Cr^{-\gamma+\frac{n}{p}} = \sup_{0 < t \leq r^{-\gamma}} \varphi(t). \quad (6)$$

Thus

$$\|f\|_{wL^p(B(0,r))} = \sup_{t>0} \varphi(t) = Cr^{-\gamma+\frac{n}{p}} = Cr^{-\frac{n}{q}+\frac{n}{p}},$$

that is concluded from Lemma 2. \square

20

By taking Lemma 2 and Lemma 3 as the tools, we are ready to state and prove the first main result of this paper.

THEOREM 1. *Let $1 \leq p < q_1 < \infty$ and $1 \leq p < q_2 < \infty$. If $q_1 \neq q_2$, then $\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ and $\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq w\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. We will only prove that $\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$ is not contained by $w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$. The proof that $\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ is not contained by $w\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$ can be done by similar method.

Let $\gamma_1 = n/q_1$ and $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, defined by the formula

$$f_1(y) = \begin{cases} |y|^{-\gamma_1}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

We will show that $f_1 \in \mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n) \setminus w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$. Let $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$ be arbitrarily given. According to Lemma 1, by replacing γ with γ_1 , we obtain

$$|B(x, r)|^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p}} \|f_1\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr^{\frac{n}{q_1} - \frac{n}{p}} r^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q_1}} = C < \infty.$$

This gives us

$$\|f_1\|_{\mathcal{M}_{q_1}^p} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p}} \|f_1\|_{L^p(B(x, r))} < \infty,$$

since x and r are arbitrary. Whence $f_1 \in \mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$. By virtue to Lemma 3, we have

$$\|f_1\|_{w\mathcal{M}_{q_2}^p} \geq |B(0, r)|^{\frac{1}{q_2} - \frac{1}{p}} \|f_1\|_{wL^p(B(0, r))} = Cr^{\frac{n}{q_2} - \frac{n}{p} - \frac{n}{q_1} - \frac{n}{q_1}} = Cr^n \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right).$$

Hence $\|f_1\|_{w\mathcal{M}_{q_2}^p} = \infty$. This is due to arbitrary r and $q_1 \neq q_2$. We conclude that $f_1 \notin w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$. Thus, we have already proved that $\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$. \square

As an immediate consequence of Theorem 1, we recover the result from [5] which is stated in the following corollary.

COROLLARY 1. *Let $1 \leq p < q_1 < \infty$ and $1 \leq p < q_2 < \infty$. If $q_1 \neq q_2$, then $w\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n)$ and $w\mathcal{M}_{q_2}^p(\mathbb{R}^n) \not\subseteq w\mathcal{M}_{q_1}^p(\mathbb{R}^n)$.*

16

3. A note on the inclusion between Morrey spaces and vanishing Morrey spaces

Let $1 \leq p < q < \infty$ and $\delta = \exp(\frac{-2q}{np})$. Define a function $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ by the formula

$$g(y) = \begin{cases} \left(\frac{\chi_B(y)}{|y|^{\frac{np}{q}} (\ln|y|)^2} \right)^{\frac{1}{p}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad (7)$$

where χ_B is a characteristic function defined on $B = B(0, \delta)$.

The function g in the following lemma is defined by (7). This following lemma shows that the vanishing Morrey spaces in a non empty set.

LEMMA 4. $g \in \mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Let $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$ be arbitrarily given. Note that

$$\begin{aligned} |B(x, r)|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|g\|_{L^p(B(x, r))} &\leq C \left(\int_{|y| \leq |x-y| < r} \frac{\chi_B(y)}{|x-y|^{n-\frac{np}{q}} |y|^{\frac{np}{q}} (\ln|y|)^2} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + C \left(\int_{\substack{\{|x-y| < |y|\} \\ \cap \{|x-y| < r\}}} \frac{\chi_B(y)}{|x-y|^{n-\frac{np}{q}} |y|^{\frac{np}{q}} (\ln|y|)^2} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= I + II. \end{aligned} \quad (8)$$

Now we have two cases, that is, $\delta \leq r$ or $r < \delta$. Assume $\delta \leq r$, then we have

$$I \leq \int_{|y| < r} \frac{\chi_B(y)}{|y|^n (\ln|y|)^2} dy = \int_{|y| < \delta} \frac{1}{|y|^n (\ln|y|)^2} dy = C \left(\frac{-1}{\ln(\delta)} \right), \quad (9)$$

and

$$\begin{aligned}
 H &= \int_{\substack{\{|x-y|<|y|<\delta\} \\ \cap \{|x-y|<r\}}} \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{np}{q}} |y|^{\frac{np}{q}} (\ln|y|)^2} dy \leq \int_{|x-y|<\delta} \frac{1}{|x-y|^n (\ln|x-y|)^2} dy \\
 &= C \left(\frac{-1}{\ln(\delta)} \right), \tag{10}
 \end{aligned}$$

since $1/t^{np/q}(\ln(t))^2$ decreasing on interval $(0, \delta)$. Assume $r < \delta$. We have

$$I \leq \int_{|y|<r} \frac{1}{|y|^n (\ln|y|)^2} dy = C \left(\frac{-1}{\ln(r)} \right) \leq C \left(\frac{-1}{\ln(\delta)} \right), \tag{11}$$

and

$$\begin{aligned}
 H &= \int_{\substack{\{|x-y|<|y|<r\} \\ \cap \{|x-y|<r\}}} \frac{1}{|x-y|^{n-\frac{np}{q}} |y|^{\frac{np}{q}} (\ln|y|)^2} dy \leq \int_{|x-y|<r} \frac{1}{|x-y|^n (\ln|x-y|)^2} dy \\
 &= C \left(\frac{-1}{\ln(r)} \right) \leq C \left(\frac{-1}{\ln(\delta)} \right), \tag{12}
 \end{aligned}$$

since $1/t^{np/q}(\ln(t))^2$ decreasing on interval $(0, r) \subseteq (0, \delta)$. By virtue of (8), (9), (10), (11), and (12), we conclude that

$$\|B(x, r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|g\|_{L^p(B(x, r))} \leq I + H \leq C \left(\frac{-1}{\ln(\delta)} \right)^{\frac{1}{p}},$$

where $C = C(n, p, q)$. This means $g \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. We remaind to prove

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{M}_f(r) = 0. \tag{13}$$

For every $0 < r < \delta$, we have shown that

$$\mathcal{M}_f(r) \leq C \left(\frac{-1}{\ln(r)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

This means (13) holds and the proof is done. \square

Now we define a function that will play as an element of Morrey spaces but not in the vanishing Morrey spaces. Let $1 \leq p < q < \infty$. For every $k \in \mathbb{N}$, with $k \geq 3$, we set $x_k = (2^{-k}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ and

$$u_k(y) = \begin{cases} 8^{\frac{np}{q}k}, & y \in B(x_k, 8^{-k}), \\ 0, & y \notin B(x_k, 8^{-k}). \end{cases}$$

Define a function $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ by the formula

$$u(y) = \left(\sum_{k=3}^{\infty} u_k(y) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

We first claim that u belongs to the Morrey spaces $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

LEMMA 5. $u \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

Proof. Let $x \in \mathbb{R}^n$ and $r > 0$ be arbitrarily given. There are two cases: (i) $x \notin B(x_k, 2(4^{-k}))$ for every $k \geq 3$, or, (ii) $x \in B(x_j, 2(4^{-j}))$ for some $j \geq 3$. Assume (i) holds. Then

$$2(4^{-k}) \leq |x - x_k| \leq |x - y| + |y - x_k| < r + 4^{-k},$$

for every $y \in B(x, r) \cap B(x_k, 8^{-k})$. This means $r^{\frac{np}{q}-n} \leq 4^{(n-\frac{np}{q})k}$ and

$$\begin{aligned} r^{\frac{np}{q}-n} \int_{B(x,r)} |u(y)|^p dy &\leq \sum_{k=3}^{\infty} 4^{(n-\frac{np}{q})k} \int_{B(x,r) \cap B(x_k, 8^{-k})} 8^{\frac{np}{q}k} dy \\ &\leq C \sum_{k=3}^{\infty} 2^{(\frac{np}{q}-n)k} < \infty, \end{aligned} \quad (15)$$

where C depends on n . Assume (ii) holds. Since $\{B(x_k, 2(4^{-k}))\}_{k \geq 3}$ is a disjoint collection, then there is only one $j \geq 3$ such that $x \in B(x_j, 2(4^{-j}))$ and $x \notin B(x_k, 2(4^{-k}))$ for every $k \geq 3$ with $k \neq j$. Note that

$$r^{\frac{np}{q}-n} \int_{B(x,r) \cap B(x_j, 8^{-j})} u_j(y) dy = r^{\frac{np}{q}-n} \int_{B(x,r) \cap B(x_j, 8^{-j})} 8^{\frac{np}{q}j} dy \leq C < \infty, \quad (16)$$

where C depends on n, p , and q . By virtue of (16) and the computation of (15), we have

$$\begin{aligned} r^{\frac{np}{q}-n} \int_{B(x,r)} |u(y)|^p dy &= r^{\frac{np}{q}-n} \sum_{k=3}^{\infty} \int_{B(x,r) \cap B(x_k, 8^{-k})} u_k(y) dy \\ &= r^{\frac{np}{q}-n} \int_{B(x,r) \cap B(x_j, 8^{-j})} u_j(y) dy \\ &\quad + r^{\frac{np}{q}-n} \sum_{\substack{k=3 \\ k \neq j}}^{\infty} \int_{B(x,r) \cap B(x_k, 8^{-k})} u_k(y) dy \\ &\leq C + C \sum_{\substack{k=3 \\ k \neq j}}^{\infty} 2^{(\frac{np}{q}-n)k} < \infty, \end{aligned} \quad (17)$$

where C depends on n, p , and q . Combining (16) and (17), whence

$$|B(x, r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(B(x,r))} = C \left(r^{\frac{np}{q}-n} \int_{B(x,r)} |u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq C < \infty,$$

where C depends on n, p , and q . Therefore $u \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. \square

The following theorem states that the vanishing Morrey spaces is a non empty proper subset of the Morrey spaces. This theorem is the second main result in this paper.

THEOREM 2. *Let $1 \leq p < q < \infty$. Then $\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ is a non empty proper subset of $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.*

Proof. According to Lemma 4, $\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ is non empty, and according to Lemma 5, the function u belongs to $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. Therefore, we need only to show that u does not belong to $\mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. Let $0 < r < 1$. By the Archimedean property, there is an integer $k \geq 3$ such that $8^{-k} < r$. Then

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_f(r))^p &\geq Cr^{\frac{np}{q}-n} \int_{B(x_k, r)} |u(y)|^p dy \geq C \int_{B(x_k, 8^{-k})} u_k(y) dy \\ &= C \int_{B(x_k, 8^{-k})} 8^{\frac{np}{q}k} dy \geq C8^{-nk} \int_{B(x_k, 8^{-k})} 1 dy = C > 0, \end{aligned}$$

where C depends on n . This means $\mathcal{M}_f(r)$ is bounded away from zero as r tends to zero. Thus $u \notin \mathcal{V}\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. \square

4 REFERENCES

- [1] C. B. MORREY, *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **43**, (1938), 126–166.
- [2] C. VITANZA, *Functions with vanishing Morrey norm and elliptic partial differential equations*, in Proceedings of Methods of Real Analysis and Partial Differential Equations, Capri, (1990).
- [3] D. I. HAKIM AND Y. SAWANO, *Complex interpolation of various subspaces of Morrey spaces*, Sci. J. UIN Ar-Raniry, **63**, 5 (2020), 937–964.
- [4] H. GUNAWAN, D. I. HAKIM, AND M. IDRIS, *Proper inclusions of Morrey spaces*, Glasnik Matematički, **53**, 1 (2018), 143–151.
- [5] H. GUNAWAN, D. I. HAKIM, K. M. LIMANTA, AND A. A. MASTA, *Inclusion properties of generalized Morrey spaces*, Math. Nachr., **290**, 1 (2017), 332–340.
- [6] H. GUNAWAN, D. I. HAKIM, E. NAKAI, AND Y. SAWANO, *On inclusion relation between weak Morrey spaces and Morrey spaces*, Nonlinear Analysis., **168**, (2018), 27–31.
- [7] N. K. TUMALUN AND H. GUNAWAN, *Morrey spaces are embedded between weak Morrey spaces and Stummel classes*, J. Indones. Math. Soc., **253**, (2019), 203–209.
- [8] N. K. TUMALUN, D. I. HAKIM, AND H. GUNAWAN, *Inclusion between generalized Stummel classes and other function spaces*, Math. Inequal. Appl., **232**, (2020), 547–562.
- [9] N. SAMKO, *Maximal, potential and singular operators in vanishing generalized Morrey spaces*, J. Global. Optim., **57**, (2013), 1385–1399.

(Received March 22, 2021)

Philotheus E. A. Tuerah
 Mathematics Department, Faculty of Mathematics and Natural Sciences
 Universitas Negeri Manado, Tondano Selatan District, Minahasa Regency
 Sulawesi Utara Province, Indonesia, Indonesia
 e-mail: pheaturah@unima.ac.id

Nicky K. Tumulun
 Mathematics Department, Faculty of Mathematics and Natural Sciences
 Universitas Negeri Manado, Tondano Selatan District, Minahasa Regency
 Sulawesi Utara Province, Indonesia
 e-mail: nickytumulun@unima.ac.id

SOME NOTES ON THE INCLUSION BETWEEN MORREY SPACES

ORIGINALITY REPORT

17 %	14 %	13 %	5 %
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	ugspace.ug.edu.gh Internet Source	1 %
2	hrcak.srce.hr Internet Source	1 %
3	www.db-thueringen.de Internet Source	1 %
4	dspace.khazar.org Internet Source	1 %
5	A. N. Karapetyants, H. Rafeiro, S. G. Samko. "On Singular Operators in Vanishing Generalized Variable-Exponent Morrey Spaces and Applications to Bergman-Type Spaces", Mathematical Notes, 2019 Publication	1 %
6	matem.anrb.ru Internet Source	1 %
7	Denny Ivanal Hakim, Yoshihiro Sawano. "Complex interpolation of various subspaces of Morrey spaces", Science China Mathematics, 2020 Publication	1 %

8	erl.ucc.edu.gh:8080 Internet Source	1 %
9	jurnal.untan.ac.id Internet Source	1 %
10	www.math.chuo-u.ac.jp Internet Source	1 %
11	A. V. Pokrovskii. "Removable singularities of solutions of second-order divergence-form elliptic equations", <i>Mathematical Notes</i> , 03/2005 Publication	1 %
12	jurnalsaintek.uinsby.ac.id Internet Source	1 %
13	tkmd.org Internet Source	1 %
14	www.pmf.ni.ac.rs Internet Source	1 %
15	kmj.knu.ac.kr Internet Source	1 %
16	Dahliatul Hasanah, Hendra Gunawan, Johan Matheus Tuwankotta. "Functions in vanishing morrey spaces", AIP Publishing, 2023 Publication	<1 %
17	eprints.whiterose.ac.uk Internet Source	<1 %

18

Dongli Liu, Jiman Zhao. "Multilinear Hausdorff operators on weighted Herz and Morrey–Herz spaces with variable exponent", *Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, 2022

Publication

<1 %

19

publikationen.bibliothek.kit.edu

Internet Source

<1 %

20

Carsten Gräser, Ralf Kornhuber. "Nonsmooth Newton Methods for Set-Valued Saddle Point Problems", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009

Publication

<1 %

21

Eiichi Nakai, Yoshihiro Sawano. "Spaces of Pointwise Multipliers on Morrey Spaces and Weak Morrey Spaces", *Mathematics*, 2021

Publication

<1 %

22

Daniel Salim, Moch Taufik Hakiki, Denny Iwanal Hakim. "INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL", *Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology*, 2022

Publication

<1 %

23

jultika.oulu.fi

Internet Source

<1 %

24

vdoc.pub

Internet Source

<1 %

25 L. Bessières. "Collapsing irreducible 3-manifolds with nontrivial fundamental group", *Inventiones mathematicae*, 11/11/2009 $<1\%$
Publication

26 Luc Deleaval, Olivier Guédon, Bernard Maurey. "Dimension free bounds for the Hardy–Littlewood maximal operator associated to convex sets", *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, 2018 $<1\%$
Publication

27 Paul Deuring. "Exterior Stationary Navier–Stokes Flows in 3D with Nonzero Velocity at Infinity: Asymptotic Behavior of the Second Derivatives of the Velocity", *Communications in Partial Differential Equations*, 2005 $<1\%$
Publication

28 www.crm.cat $<1\%$
Internet Source

29 www.few.vu.nl $<1\%$
Internet Source

30 Bilel Selmi. "The relative multifractal analysis, review and examples", *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 2020 $<1\%$
Publication

31 doi.org $<1\%$
Internet Source

32

Bernard R. Gelbaum. "Problems in Real and Complex Analysis", Springer Science and Business Media LLC, 1992

Publication

<1 %

33

Hassen Aydi. "On a Ginzburg-Landau type energy with discontinuous constraint for high values of applied field", Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2010

Publication

<1 %

34

Jan W. Cholewa, Anibal Rodriguez-Bernal. "On linear higher order parabolic equations in Morrey spaces", Analysis and Applications, 2023

Publication

<1 %

Exclude quotes Off

Exclude matches < 2 words

Exclude bibliography Off